**Permutáció:** Legyen A egy halmaz n különböző elemmel (n ∈ N). A egy permutációján egy, az {1, 2, . . . , n} halmaz és A közötti bijektív leképezést értünk, azaz az A elemeinek valamilyen sorrendben való felsorolását.

**Ismétléses permutáció:** Akkor merül fel, amikor egy halmaz elemeit úgy rendezzük el, hogy egyes elemek többször is szerepelhetnek a rendezett sorozatban. Pnl1…lk = n!/(l1!…lk!)

**Tétel:** n különböző elem lehetséges sorbarendezéseinek a száma Pn = n!.

**Variáció:** Egy n elemű halmaz k-ad osztűlyú ismétlés nélküli variációi alatt a halmaz elemeiből kiválasztott k hosszúságú sorozatokat értjük. Ezek száma: Vn,k = (n!)/(n-k)!

**Ismétléses variáció:** Egy n elemű halmaz k-ad osztályú ismétléses variációi alatt a halmaz elemeiből visszatevéssel kiválasztott k hosszúságú sorozatokat értjük. Ezek száma: Vin,k = nk

**Ismétlés nélküli kombináció:** Egy n elemű halmaz k elemű részhalmazait a halmaz k-ad osztályú ismétlés nélküli kombinációinak nevezzük. Számuk: Cn,k =

**Ismétléses kombináció:** Ha egy n elemű halmaz elemeiből úgy képezünk k elemű halmazt, hogy egy elemet többször is választhatunk (azaz visszatevéssel), akkor az n elem k-ad osztályú ismétléses kombinációjáról beszélünk. Számuk:Cin,k

**Binominális tétel:** (x+y)n = xn + xn-1y+xn-2y2+…+x\*yn =

**Binominális együttható:** Az kifejezést binomiális együtthatónak nevezzük. (együtthatók a pascal háromszögben)

**Eseménytér:** Legyen Ω rögzített, nem üres halmaz: Ω = {ω1, ω2, . . . }. Ezt eseménytérnek, az elemeit pedig elemi eseményeknek nevezzük.

**Tétel:** Az elemi események halmazát eseménytérnek nevezzük.

**Elemi esemény:** Olyan esemény, ami már nem bontható tovább. jele: ω

**Esemény:** Az eseménytér részhalmazait eseményeknek nevezzük.

**Esemény bekövetkezése:** Az Ω eseménytér egy A ⊂ Ω eseménye bekövetkezik, ha az ω ∈ Ω elemi esemény valósul meg és ω ∈ A.

**Lehetetlen esemény:** Olyan esemény, amely sosem következik be.

**Biztos esemény:** Olyan esemény, amely biztos hogy bekövetkezik.

**Diszjunk esemény:** Az A és B események diszjunktak vagy egymást kizáró események, ha egyszerre nem következhetnek be.

**Tétel:** Az A esemény maga után vonja a B eseményt, ha az A esemény bekövetkezése esetén szükségképpen B is bekövetkezik.

**Eseményalgebra:** Tekintsünk egy Ω eseményteret. Ennek bizonyos részhalmazait akkor nevezzük eseményeknek, valamint ezen halmazok A halmazát eseményalgebrának, ha:

a biztos esemény: Ω ∈ A;

ha A esemény, akkor az A komplementere is az: ha A ∈ A, akkor A komplementer ∈ A;

ha A1, A2, .események, akkor ezek uniója (összege) is esemény: ha A1, A2, …∈ A, akkor: =

**Gyakoriság:** Az A esemény gyakorisága az a szám, ahányszor az A esemény bekövetkezik az n kísérlet során. Jele: kn(A). Ekkor kn(A) ∈ {0, 1, . . . , n}.

**Relatív gyakoriság:** Az A esemény relatív gyakorisága a bekövetkezések számának és n-nek a hányadosa: rn(A) = kn(A)/n .

**Relatív gyakoriság tulajdonságai:**

0 ≤ rn(A) ≤ 1;

rn(∅) = 0, rn(Ω) = 1;

ha A és B egymást kizáró események, akkor: rn(A + B) = rn(A) + rn(B);

ha A1, A2, . . . egymást páronkánt kizáró események, akkor rn = ))

rn(A) = 1 − rn(A);

ha A ⇒ B, akkor rn(A) ≤ rn(B).

**Valószínűségi mező:** Tekintsünk egy P : A → R függvényt, melyre:

P(A) ≥ 0, tetszőleges A ∈ A esetén;

P(Ω) = 1;

ha A1, A2, · · · ∈ A egymást páronként kizáró események, akkor:

P = )) Ez a valószínűség σ-additivitása.

Ekkor P-t valószínűségnek vagy valószínűségi függvénynek, P(A)-t pedig az A esemény valószínűségének mondjuk. Az (Ω, A, P) hármast valószínűségi mezőnek hívjuk.

**Valószínűségi mező további tulajdonságai (** (Ω, A, P) egy valószínűségi mező**):**

P(∅) = 0.

P (végesen) additív

P(komplementer A) = 1 − P(A)

P monoton ha A ⇒ B (azaz A ⊂ B), akkor P(A) ≤ P(B).

Tetszőleges A és B események esetén P(A + B) = P(A) + P(B) − P(A · B)

**Diszkrét valószínűségi mező:** Az Ω eseményteret, valamint az (Ω, A, P) valószínűségi mezőt diszkrétnek mondjuk, ha Ω megszámlálható halmaz, tehát véges: Ω = {ω1, . . . , ωn}, vagy megszámlálhatóan végtelen: Ω = {ω1, ω2, . . . }, továbbá A = 2Ω

**Tétel:** Diszkrét valószínűségi mezőben a pi := P({ωi}), i = 1, 2, . . . számok (egyértelműen meghatározzák a P valószínűségi függvényt. Ekkor a fenti valószínűségek nemnegatívak: pi ≥ 0, és összegük 1, hiszen = =P( = P(Ω) = 1. Ekkor a {p1, p2,} számok eloszlást alkotnak.

**Klasszikus valószínűségi mező:** Az (Ω, A, P) valószínűségi mező klasszikus valószínűségi mező, ha Ω véges, azaz Ω = {ω1, ω2, . . . , ωn}, A = 2Ω, továbbá minden elemi esemény egyenlően valószínű.

**Tétel:** - P(AUB) = P(A) + P(B) – P(A metszet B)

**Tétel:** Klasszikus valószínűségi mezőben egy k elemű A esemény valószínűsége kiszámítható a (kedvező esetek száma / összes eset száma) képlettel.

**Tétel:** Nem klasszikus mező esetén egy esemény valószínűsége a benne lévő elemi események valószínűségének az összege.

**Geometriai valószínűségi mező:** Ha az eseményteret Rn egy véges részhalmazával tudjuk beazonosítani, az elemi események pedig egyenletesen oszlanak el ezen a halmazon, akkor geometriai valószínűségi mezőről beszélünk.

**Feltételes valószínűség:** Az A esemény feltételes valószínűsége a B feltétel mellett P(A|B) = P(A metszet B) / P(B) , ha P(B) > 0

**Teljes eseményrendszer:** Azt mondjuk, hogy az A1, A2, . .. An ∈ A események teljes eseményrendszert alkotnak, ha pozitív valószínűségűek, az eseménytér egy diszjunkt felbontását alkotják, azaz egymást páronként kizárják, és összegük a teljes eseménytér.

**Teljes valószínűség tétel:** Legyen (Ω, A, P) valószínűségi mező és tekintsünk egy A1, A2, An ∈ A teljes eseményrendszert. Ekkor tetszőleges B esemény esetén P(B) =

**Bayes-formula:** Ha A és B tetszőleges, pozitív valószínűségű események, akkor P(A|B) = (P(A) · P(B|A))/ P(B)

**Bayes tétel:** Tekintsünk egy A1, A2, …An ∈ A teljes eseményrendszert, valamint egy pozitív valószínűségű B eseményt: P(B) > 0. Ekkor P(Aj |B) = (P(B|Aj) · P(Aj)) / ( P(B|Ai) · P(Ai))

**Függetlenség:** Azt mondjuk, hogy az A és B események függetlenek, ha P(AB) = P(A) · P(B). Ha az A és B események pozitív valószínűségűek, akkor az alábbiak ekvivalensek: A és B függetlenek; P(A) = P(A|B); P(B) = P(B|A).

**Tétel:** Az A1, A2, . . . események páronként függetlenek, ha közülük bármely két esemény független.

**Tétel:** Az A1, A2, . . . események (teljesen) függetlenek, ha tetszőleges i1, i2, . . . ik indexek esetén P(Ai1 · Ai2 . . . Aik ) = P(Ai1 ) · P(Ai2 ). . . P(Aik )

**Valószínűségi változó:** A ξ : Ω → R függvény valószínűségi változó, ha tetszőleges x ∈ R esetén {ω ∈ Ω | ξ(ω) < x} ∈ A.

**Eloszlásfüggvény:** Legyen ξ valószínűségi változó az (Ω, A, P) valószínűségi mezőn. Ennek eloszlásfüggvénye alatt az Fξ : R → [0, 1], x 7→ Fξ(x) := P(ξ < x) függvényt értjük.

**Tétel:** Egy F : R → [0, 1] függvény pontosan akkor eloszlásfüggvénye valamely ξ : Ω → R valószínűségi változónak, ha monoton növekvő, balról folytonos és

**Diszkrét valószínűségi változó:** A ξ : Ω → R valószínűségi változó diszkrét, ha értékkészlete megszámlálható**.**

**Tétel:** Aξ diszkrét valószínűségi változó eloszlása az a Pξ függvény a ξ lehetséges értékeinek X = {x1, x2, . . . } halmazán, melyre Pξ(xi) = P(ω ∈ Ω | ξ(ω) = xi), xi ∈ X.

**Tétel:** Egy diszkrét valószínűségi változó eloszlásfüggvénye olyan lépcsős függvény, mely ξ értékkészletének xi elemeinél P(ξ = xi) mennyiséget ugrik felfelé.

**Tétel:** Legyen p ∈ (0, 1), n ∈ N. Azt mondjuk, hogy a ξ valószínűségi változó n-edrendű, p paraméterű binomiális eloszlású valószínűségi változó, ha értékkészlete {0, 1, 2, . . . , n}, és . ξ-t ebben az esetben n és p paraméterű binomiális eloszlású valószínűségi változónak is hívjuk. Jelölés: ξ ∼ Bin(n, p).

**Bernoulli eloszlás:** Legyen p ∈ (0, 1). Azt mondjuk, hogy a ξ valószínűségi változó p paraméterű Bernoulli-eloszlású valószínűségi változó, ha értékkészlete {0, 1}, és P(ξ = 1) = p P(ξ = 0) = 1 − p.

**Hipergeometrikus eloszlás:** Egy dobozban N golyó van, M db kék és N − M db zöld. Visszatevés nélkül húzzunk ki n golyót (n ≤ N). Jelölje ξ a kihúzott kék golyók számát. Ekkor P(ξ = k) = ahol az értékkészlet elemei olyan k értékek, melyekre 0 ≤ k ≤ n, k ≤ M és n − k ≤ N – M.

**Tétel:** Ha a ξ valószínűségi változó eloszlása a fenti alakú, akkor (n, M, N − M) paraméterű hipergeometrikus eloszlásúnak mondjuk.

**Negatív binominális eloszlás:** Legyen p ∈ (0, 1), r ∈ N. Azt mondjuk, hogy a ξ valószínűségi változó r-edrendű, p paraméterű negatív binomiális eloszlású valószínűségi változó, ha értékkészlete {r,r + 1,r + 2, . . . }, és P(ξ = k + r) = pr (1-p)k , k = 0, 1, 2,…

**Tétel:** Legyen p ∈ (0, 1). Azt mondjuk, hogy a ξ valószínűségi változó p paraméterű geometriai eloszlású (vagy elsőrendű negatív binomiális) valószínűségi változó, ha értékkészlete {1, 2, . . . }, és P(ξ = k + 1) = p(1-p)k , k = 0, 1, 2,…

**Poisson eloszlás:** Legyen λ > 0. Azt mondjuk, hogy a ξ valószínűségi változó λ paraméterű Poisson-eloszlású valószínűségi változó, ha értékkészlete {0, 1, 2,…}, és

**Diszkrét valószínűségi változók várható értéke:** Tekintsünk egy ξ : Ω → R diszkrét valószínűségi változót, legyen ennek értékkészlete {x1, x2, … }. Az mennyiséget ξ várható értékének nevezzük, amennyiben ez a sor abszolút konvergens, azaz

**Várható érték tulajdonságai:** Legyenek ξ és η valószínűségi változók, amelyeknek létezik a várható értékük, továbbá a, b ∈ R. Ekkor

- E(aξ) = a · Eξ, azaz a várható érték homogén;

- E(ξ + η) = Eξ + Eη, azaz a várható érték additív;

- E(aξ + bη) = a · Eξ + b · Eη, azaz a várható érték lineáris;

- ha ξ ≤ η, akkor Eξ ≤ Eη, azaz a várható érték monoton;

- |Eξ| ≤ E|ξ|.

**Valószínűségi változó függvényének várható értéke:** Tekintsünk egy ξ diszkrét valószínűségi változót, amelynek értékkészlete {x1, x2, . . . }, valamint egy g : R → R függvényt. Ekkor g(ξ) is diszkrét valószínűségi változó, amelynek várható értéke amennyiben ez a mennyiség létezik (azaz a sor abszolút konvergens).

**Diszkrét valószínűségi változók szórása, szórásnégyzete:** Legyen ξ diszkrét valószínűségi változó véges várható értékkel, legyen m := Eξ. A D2 ξ := E(ξ − m)2 mennyiséget, amennyiben létezik, ξ szórásnégyzetének vagy varianciájának nevezzük. Másik jelölés: Var(ξ). Ennek pozitív négyzetgyöke, Dξ a szórás.

**Szórásnégyzet kiszámítása:** Ha ξ szórásnégyzete véges, akkor ez számolható az alábbi képlettel: D2ξ = Eξ 2 − E2ξ. Tehát ha ξ diszkrét valószínűségi változó, amelynek értékkészlete {x1, x2, … }, akkor A D2 ξ = 2k \* P(ξ = xk ) – ( \* P(ξ = xk ))

**Szórásnégyzet tulajdonságai:**

- D2ξ ≥ 0

- D2(aξ) = a2D2ξ

- D2(ξ + b) = D2ξ

**Nevezetes diszkrét eloszlások várható értéke, szórásnégyzete:**

- **binomiális eloszlás:** Eξ = = np, D2ξ = np(1 − p)

- hipergeometrikus eloszlás: Eξ = , D2ξ = n \*

- **negatív binominális eloszlás:** Eξ = r/p, D2ξ = r\* (1-p)/p2

- **Poisson eloszlás:** Eξ = λ, D2ξ = λ

**Folytonos valószínűségi változó:** Tekintsünk egy ξ valószínűségi változót F eloszlásfüggvénnyel. Ha létezik olyan f : R → R (mérhető) függvény, melyre , akkor ezt az f függvényt ξ sűrűségfüggvényének nevezzük, ξ-ról pedig azt mondjuk, hogy eloszlása abszolút folytonos, vagy folytonos valószínűségi változó.

**Sűrűségfüggvény tulajdonságai:** Legyen ξ folytonos valószínűségi változó F eloszlás- és f sűrűségfüggvénnyel. Ekkor:

* f (x) ≥ 0 x ∈ R esetén = 1
* ha f folytonos az x ∈ R pontban, akkor F’(x) = f (x);
* ha a < b, akkor P(a ≤ ξ < b) = F(b) − F(a) =

**Egyenletes eloszlás:** A ξ valószínűségi változót az [a, b] intervallumon egyenletes eloszlásúnak nevezzük, ha eloszlásfüggvénye Jele: ξ ∼ U(a,b).

**Normális eloszlás:** A ξ valószínűségi változót normális eloszlásúnak nevezzük, ha sűrűségfüggvénye f(x)= alakú, ahol m ∈ R, σ > 0. Jele: ξ ∼ N (m, σ2 ).

**Standard eloszlás:** A ξ valószínűségi változót standard normális eloszlásúnak nevezzük, ha sűrűségfüggvényef(x)= . Ekkor tehát ξ ∼ N (0, 1).

**Exponenciális eloszlás (örökifjú):** A ξ valószínűségi változót λ paraméterű exponenciális eloszlásúnak nevezzük, ha eloszlásfüggvénye ahol λ > 0 rögzített.

**Tétel:** Ekkor ξ folytonos valószínűségi változó, amelynek sűrűségfüggvénye

ha x > 0

**Folytonos valószínűségi változók várható értéke:** Tekintsünk egy ξ : Ω → R abszolút folytonos eloszlású valószínűségi változót f sűrűségfüggvénnyel. Ekkor ξ várható értéke Eξ = , amennyiben ez az improprius integrál abszolút konvergens, azaz

**Tétel:** Legyen ξ folytonos valószínűségi változó f sűrűségfüggvénnyel, valamint tekintsünk egy g : R → R függvényt. Ekkor Eg(ξ) =

**Tétel:** Legyen ξ folytonos valószínűségi változó véges várható értékkel. A D2ξ := E(ξ − Eξ)2 mennyiséget, amennyiben létezik, ξ szórásnégyzetének vagy varianciájának nevezzük. Ennek pozitív négyzetgyöke a szórás: Dξ := gyök(D2ξ).

**Szórásnégyzet kiszámítása:** D2ξ = Eξ2−E2ξ = – (2

**Nevezetes folytonos eloszlások várható értéke, szórásnégyzete:**

**egyenletes eloszlás:** Eξ = (a+b)/2 D2ξ = (b-a)2/12

**normális eloszlás:** Eξ = m D2ξ = σ2

**exponenciális eloszlás:** Eξ = 1/ λ D2ξ = 1/ λ2

**Valószínűségi változók függetlensége:** A ξ és η valószínűségi változók függetlenek, ha együttes eloszlásfüggévényük felbomlik a két marginális eloszlásfüggvény szorzatára, azaz F(x, y) = Fξ(x) · Fη(y)

**Peremeloszlásfüggvény**: Tekintsük a ξ és Fξ(x) valószínűségi változókat, ezek együttes eloszlásfüggvényét jelölje F. (Tehát F(x, y) = P(ξ < x, η < y).) Ekkor Fξ(x) = és Fη(y) = rendre ξ és η eloszlásfüggvénye, amelyeket az együttes eloszlás marginális (vagy perem-) eloszlásfüggvényeinek is nevezünk.